

Euklidischer Teilalgorithmus

Euklidischer Teilalgorithmus

Alexander Ölzant

Euklidischer Teilalgorithmus

Euklidischer Teilalgorithmus

Ziel: grösster gemeinsamen Teiler

Euklidischer Teilalgorithmus

Euklidischer Teilalgorithmus

Ziel: grösster gemeinsamen Teiler

Euklid (~ 300 vC)

Euklidischer Teilalgorithmus

Voraussetzungen

1. für zwei ganze Zahlen gilt:

$$b|a \Rightarrow \text{ggt}(a, b) = b$$

2. Rekursionsschritt:

$$a = bt + r \Rightarrow \text{ggt}(a, b) = \text{ggt}(b, r)$$

(für $t, r \in \mathbb{N}$)

Euklidischer Teilalgorithmus

Trivialfall

wenn eine Zahl a die andere (a) teilt, ist sie der grösste gemeinsame Teiler der beiden Zahlen

$$b|a \Rightarrow \text{ggt}(a, b) = b$$

keine Zahl kann durch eine Zahl geteilt werden, die grösser ist als die Zahl selbst.

Euklidischer Teilalgorithmus

Rekursionsschritt

da der $\text{ggT}(a, b)$ ein Vielfaches von b ist, kann ich b von a subtrahieren, der ggT von $(a - b)$ und b ist der gleiche wie der von a und b . Vereinfacht: ich kann wiederholt den Divisionsrest $a \% b$ von a und b bestimmen. Wenn dieser 0 wird, ist b der ggT der beiden Zahlen.

$$a = bt + r \Rightarrow \text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r)$$

(für $t, r \in \mathbb{N}$)

Euklidischer Teilalgorithmus

Algorithmus

1. wenn $b > a$, dann vertausche a und b
2. wenn a durch b dividierbar ist, dann Ergebnis $\text{ggT}(a, b) == b$
ENDE
3. subtrahiere b von a
4. gehe zu 1.

Euklidischer Teilalgorithmus

Beispiel

$$1. a = 9690, b = 3825 \Rightarrow r = 2040$$

$$2. a = 3825, b = 2040 \Rightarrow r = 1785$$

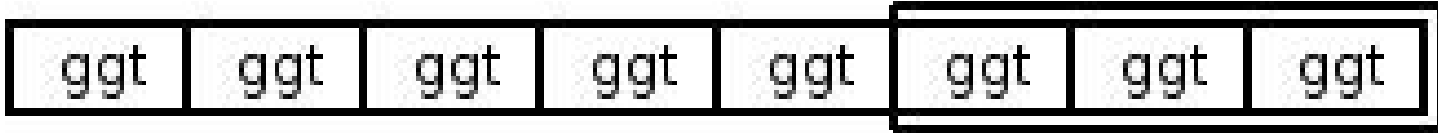
$$3. a = 2040, b = 1785 \Rightarrow r = 255$$

$$4. a = 1785, \mathbf{b} = \mathbf{255} \Rightarrow r = 0$$

$$\text{ggt}(9690, 2040) == 255$$

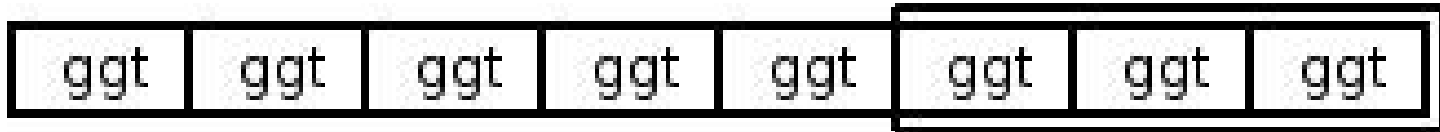
Euklidischer Teilalgorithmus

graphische Überlegung



Euklidischer Teilalgorithmus

graphische Überlegung



ggt	ggt	ggt	ggt	ggt	ggt	ggt	ggt
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

ggt	ggt	ggt	ggt	ggt
-----	-----	-----	-----	-----

ggt	ggt	ggt	ggt	ggt
-----	-----	-----	-----	-----

ggt	ggt	ggt
-----	-----	-----

ggt	ggt	ggt
-----	-----	-----

ggt	ggt
-----	-----

Euklidischer Teilalgorithmus

Schreibweise

$b|a$ b teilt a ($a \% b == 0$)
 $ggt(a, b)$ grösster gemeinsamer Teiler